THEOREME DE FEUERBACH

> Le cercle d'Euler est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.

Démonstration

Soit ABC un triangle. On note (Ω) le cercle d'Euler, A'B'C' les milieux des côtés, A"B"C" les pieds des hauteurs, (Γ) le cercle inscrit, I son centre, (Γ_A) (Γ_B) (Γ_C) les cercles exinscrits dans les angles $\hat{A}$ $\hat{B}$ $\hat{C}$, I_A I_B I_C leurs centres, A_1 B_1 C_1 les points de contact de (Γ) avec les côtés, A_2 B_2 C_2 ceux de (Γ_A) (Γ_B) (Γ_C).

1) Faire la figure. (prévoir une grande feuille !)

2) Première question préliminaire

Soit i l'inversion de pôle O et de puissance k^2, (C) le cercle de centre O et de rayon k, (Γ) un cercle orthogonal à (C). Montrer que $i(\Gamma)=(\Gamma)$.

3) Deuxième question préliminaire

Montrer que la tangente T' en A' au cercle d'Euler d'un triangle ABC est parallèle à la tangente en A au cercle circonscrit à ce même triangle.

4) Troisième question préliminaire

Soit ABC un triangle, AI la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ et AT la tangente en A au cercle circonscrit. Montrer que $(AI,BC)=(AT,AI)$ (π). En déduire $(AI,BC)=(T',AI)$ (π).

5) Montrer que $CA_1=p-c$ et $BA_2=p-c$ où p désigne le demi-périmètre de ABC et c la longueur de BA. En déduire que A' est le milieu de A_1A_2.

6) Soit i l'inversion de pôle A' et de puissance $A'A_1{}^2$. Quelles sont les images de (Γ) et (Γ_A) par i ? (on pourra noter (C) le cercle de diamètre A_1A_2.)

7) Montrer que $(D)=i(\Omega)$ est parallèle à la tangente en A' à (Ω). En déduire que $(D,AI)=(AI,BC)$ (π).

8) Soit (D') la tangente intérieure commune à (Γ) et (Γ_A) autre que BC. Montrer que $(D)//(D')$.

9) Soit A_o le point d'intersection de BC et (D'). Montrer que (A'',A_o,A_1,A_2) est un quaterne harmonique puis que $\overline{A'A''}.\overline{A'A_o} = (\overline{A'A_1})^2$.

10) Conclure ...
